Universitatea "Politehnica" din Bucureşti
Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii şi
Tehnologia Informaţiei

# Computer vision I - Fundamente

## Curs 8 – Transformări integrale

Prof. Bogdan IONESCU



## Plan Curs 8 – Transformări integrale

8.1. Introducere

8.1. Transformări unitare

8.2. Transformata Fourier, Cosinus şi Sinus

8.3. Transformări bazate pe vectori proprii

8.4. Transformata Wavelet

8.5. Transformata Hough

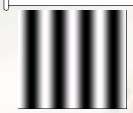


## 8.1. Introducere



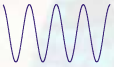
## De ce să transformăm imaginea ?

- o imagine în sensul clasic furnizează informaţii vizuale, spaţiale de vecinătate între pixeli:



→din punct de vedere spaţial (coordonate) observăm 5 obiecte luminoase pe un fond întunecat, asemănătoare unor bare verticale:
*informaţie*= 176 x 176 x 8 biţi = 30.25kB

- totuşi, anumite informaţii nu sunt disponibile direct în domeniul de definiţie iniţial al imaginii:

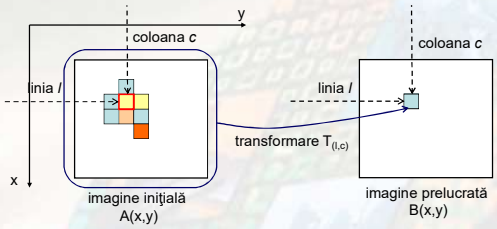


→imaginea poate fi interpretată ca o oscilaţie sinusoidală (frecvenţial):
*informaţie*≈ frecvenţa + amplitudine + DC (eventual)

→de asemenea, din punct de vedere al contururilor putem identifica o succesiune de drepte
*informaţie*≈ (ecuaţie dreaptă+intensitate) x nr.drepte



## Definiţie operaţii integrale




$$B(l,c) = T_{(l,c)}(A)$$

noua valoare a oricărui pixel din imaginea prelucrată *B(x,y)* rezultă din combinarea valorilor tuturor pixelilor din imaginea iniţială *A(x,y)*.



## 8.2. Transformări unitare

## Transformări 2D ortogonale şi unitare

- termenul de transformare integrală a imaginii se referă în general la o clasă de matrice de transformare ce permit dezvoltarea în serie a imaginii.

→ de exemplu:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 4 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A_{1,1}} + 1 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A_{1,2}} - 1 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A_{2,1}} + 2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A_{2,2}}$$

imaginea U

bază matrice transformare

$$U(0,0) = 4 \cdot A_{1,1}(0,0) + 1 \cdot A_{1,2}(0,0) - 1 \cdot A_{2,1}(0,0) + 2 \cdot A_{2,2}(0,0)$$

…

$$U(1,1) = 4 \cdot A_{1,1}(1,1) + 1 \cdot A_{1,2}(1,1) - 1 \cdot A_{2,1}(1,1) + 2 \cdot A_{2,2}(1,1)$$



## Transformări 2D ortogonale şi unitare

- aceste matrice ale transformării nu sunt alese aleator, ci similar unui sistem de coordonate, acestea trebuie să aibă o serie de proprietăţi...

- în cazul general această dezvoltare poate fi scrisă ca:

$$U(m,n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a^*_{k,l}(m,n) \cdot V(k,l)$$

unde *U* reprezintă imaginea de dimensiune *NxN* (pentru exemplificare considerăm cazul particular), $0 \le m,n \le N-1$, $\{a_{k,l}(m,n)\}$ definesc transformarea imaginii fiind un set de funcţii discrete de bază, $0 \le k,l \le N-1$ iar *V(k,l)* sunt *coeficienţii dezvoltării* în serie.
(* reprezintă complex-conjugatul)

- transformarea este caracterizată de $N^4$ coeficienţi, $a_{k,l}(m,n)$ cu $k,l,m,n=0,\ldots,N-1$, ce reprezintă nucleul transformării.



## Transformări 2D ortogonale şi unitare

[A.K. Jain]

- dacă funcţiile de bază, $\{a_{k,l}(m,n)\}$, îndeplinesc condiţiile de:

a. ortonormalitate:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n) \cdot a^*_{k',l'}(m,n) = \delta(k-k', l-l'), \ \forall k,l,k',l'$$

→ asigură faptul că orice dezvoltare trunchiată minimizează eroarea pătratică de aproximare:

$$U_{P,Q}(m,n) = \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{Q-1} a^*_{k,l}(m,n) \cdot V(k,l), \ P,Q < N$$

$$\sigma_e^2 = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [U(m,n) - U_{P,Q}(m,n)]^2 \to \min$$

- dacă P=Q=N atunci eroarea este 0.



## Transformări 2D ortogonale şi unitare

[A.K. Jain]

- dacă funcţiile de bază, $\{a_{k,l}(m,n)\}$, îndeplinesc condiţiile de: (continuare)

b. completitudine:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n) \cdot a^*_{k,l}(m',n') = \delta(m-m', n-n')$$

→ asigură faptul că baza de funcţii este completă.

- atunci dezvoltarea inversă se poate scrie ca:

$$V(k,l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n) \cdot U(m,n)$$

unde $V=\{V(k,l)/0 \le k,l \le N-1\}$ reprezintă imaginea transformată, *V(k,l)* fiind coeficienţii transformării.



## Transformări unitare separabile

[A.K. Jain]

$$V(k,l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n) \cdot U(m,n)$$

- se poate observa că pentru calculul coeficienţilor transformării sunt efectuate $N^4$ înmulţiri → ~$O(N^4)$ ↗

→ mai avantajos este să considerăm transformarea separabilă:

$$a_{k,l}(m,n) = a_k(m) \cdot b_l(n) = a(k,m) \cdot b(l,n)$$

unde $\{a_k(m)/k=0,\ldots,N-1\}$ şi $\{b_l(n)/l=0,\ldots,N-1\}$ reprezintă seturi de vectori (de bază) ai transformării.

- impunerea condiţiilor de ortonormalitate şi completitudine conduce la necesitatea ca matricele $A=\{a(k,m)\}$ şi $B=\{b(l,n)\}$ să fie unitare:

$$A \cdot A^{*T} = A^T \cdot A^* = I_N, \ B \cdot B^{*T} = B^T \cdot B^* = I_N$$

unde $^T$ este transpusa, iar $I_N$ matricea unitate.



## Transformări unitare separabile

[A.K. Jain]

- folosind această formă, tranformarea directă şi inversă se poate exprima ca produs matriceal astfel:

$$V = A \cdot U \cdot B^T$$

$$U = A^{*T} \cdot V \cdot B^*$$

unde *U* este imaginea iniţială iar *V* este imaginea transformată.

- în acest fel, complexitatea de calcul este redusă cu un ordin de măsură la ~$O(N^3)$.

- în practică, pe lângă condiţia de separabilitate, matricele transformărilor se aleg în aşa fel încât *A=B*, ceea ce conduce la o transformare simetrică:

$$V = A \cdot U \cdot A^T$$

$$U = A^{*T} \cdot V \cdot A^*$$

[A.K. Jain]

## Transformări unitare separabile

- şi mai departe: $V^T = A \cdot (A \cdot U)^T$

→ transformarea se poate *realiza cu transformări unidimensionale*, succesiv, mai întâi pe fiecare coloană a lui U şi apoi rezultatul pe fiecare linie (sau viceversa):

$$V(k,l) = \sum_{m=0}^{N-1} a(k,m) \cdot \left[ \sum_{n=0}^{N-1} U(m,n) \cdot a(l,n) \right]$$

## Imaginile de bază ale transformării

$$U(m,n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a^*_{k,l}(m,n) \cdot V(k,l)$$

- matriceal transformarea se poate scrie:

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A^*_{k,l} \cdot V(k,l)$$

unde *U* reprezintă imaginea de dimensiune *NxN* iar $\{A_{k,l}\}$ **reprezintă baza de imagini a transformării** (vezi exemplul de pag 6), cu *k,l=0,...,N-1*.



[A.K. Jain]

## Imaginile de bază ale transformării

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A^*_{k,l} \cdot V(k,l)$$

- cu alte cuvinte, transformarea imaginii înseamnă proiectarea acesteia (dată de coeficienţii *V*) pe o *bază de imagini*.

- trecerea de la forma: $V^T = A \cdot (A \cdot U)^T$ la baza de imagini se face în felul următor:

$$A^*_{k,l} = a^*_k \cdot a^{*T}_l$$

unde $a^*_k$ reprezintă coloana *k* a matricei $A^{*T}$.

- exemplu:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot A^{*T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

imaginea — matricea transformării — unitară ?



[A.K. Jain]

## Imaginile de bază ale transformării

- exemplu (continuare): $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \; A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

- care este imaginea transformată ?

$$V = A \cdot U \cdot A^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- care este baza de imagini a transformării ($A_{k,l}$,*k,l=0,1*) ?

$$A^*_{0,0} = a^*_0 \cdot a^{*T}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^*_{0,1} = a^*_0 \cdot a^{*T}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



[A.K. Jain]

## Imaginile de bază ale transformării

- exemplu (continuare): $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \; A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; V = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

- care este baza de imagini a transformării ($A_{k,l}$,*k,l=0,1*) ?

$$A^*_{1,0} = a^*_1 \cdot a^{*T}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^*_{1,1} = a^*_1 \cdot a^{*T}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- verificăm:

$$U = \sum_{k=0}^{1} \sum_{l=0}^{1} A^*_{k,l} \cdot V(k,l) = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = ?$$



[A.K. Jain]

## Proprietăţile transformărilor unitare 1D

- pentru exemplificare vom considera cazul unidimensional, fie semnalul de intrare *u* (vector de dimensiune *N*), şi transformata sa *v* obţinută prin matricea unitară *A* (dimensiune *NxN*):

$$v = A \cdot u$$

a. conservarea energiei:

$$\left.\begin{aligned} E_v &= \| v \|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} | v(k) |^2 = v^{*T} \cdot v \\ E_u &= \| u \|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} | u(k) |^2 = u^{*T} \cdot u \end{aligned}\right\} E_v = E_u$$

$$E_v = v^{*T} \cdot v = (A \cdot u)^{*T} \cdot A \cdot u = u^{*T} \cdot A^{*T} \cdot A \cdot u = u^{*T} \cdot I \cdot u = E_u$$

- energia înseamnă de fapt lungimea Euclidiană în spaţiul N dimensional, conservare energie = conservare lungime,
→ transformarea este o rotaţie a lui *u* în spaţiul semnalului,
→ baza lui u este rotită iar v reprezintă proiecţia lui u pe noua bază.



[A.K. Jain]

## Proprietăţile transformărilor unitare 1D

b. compactarea energiei:

- media semnalului *v* este proporţională cu cea a lui u:

$$\mu_v = \overline{v} = \overline{A \cdot u} = A \cdot \mu_u$$

- energia medie a semnalului se conservă:

$$\overline{E_v} = \overline{v^{*T} \cdot v} = \overline{v^{*T}} \cdot \overline{v} = \overline{(A \cdot u)^{*T}} \cdot \overline{(A \cdot u)}$$

$$\overline{E_v} = \overline{u^{*T} \cdot A^{*T}} \cdot \overline{A \cdot u} = \overline{u^{*T}} \cdot I \cdot \overline{u} = \overline{E_u}$$

- matricea de covariaţie:

varianţe — corelaţie

$$R_v = \overline{(v - \mu_v) \cdot (v - \mu_v)^{*T}} = \begin{bmatrix} \overline{(v_0 - \mu_v)^2} & \dots & \overline{(v_0 - \mu_v) \cdot (v_{N-1} - \mu_v)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{(v_{N-1} - \mu_v) \cdot (v_0 - \mu_v)} & \dots & \overline{(v_{N-1} - \mu_v)^2} \end{bmatrix}$$

## Proprietăţile transformărilor unitare 1D

[A.K. Jain]

b. compactarea energiei (continuare):

$$R_v = \overline{(v-\mu_v)\cdot(v-\mu_v)^{*T}}$$

$$R_v = \overline{(A\cdot u - A\cdot\mu_u)\cdot(A\cdot u - A\cdot\mu_u)^{*T}}$$

$$R_v = \overline{A\cdot(u-\mu_u)\cdot(u-\mu_u)^{*T}\cdot A^{*T}}$$

$$R_v = A\cdot R_u\cdot A^{*T}$$

→ corelaţia componentelor se modifică.

- suma varianţelor se conservă:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sigma_v^2(k) = Tr[A\cdot R_u\cdot A^{*T}] = Tr[R_u] = \sum_{l=0}^{N-1}\sigma_u^2(l)$$

unde Tr=trace iar *Tr*[*ABC*]=*Tr*[*CAB*]=*Tr*[*BCA*] dacă matricele sunt pătratice.



## Proprietăţile transformărilor unitare 1D

b. compactarea energiei (continuare):

- majoritatea transformărilor unitare au tendinţa de a aglomera o mare parte a energiei medii a semnalului iniţial în doar câţiva coeficienţi ai transformării,
→ energia se conservă, deci o mare parte a coeficienţilor sunt de energie mică,
→ energia medie a coeficienţilor tinde să fie distribuită neuniform.

c. decorelare:

-dacă elementele vectorului iniţial, *u*, sunt puternic corelate, în urma unei transformări unitare elementele vectorului rezultat tind să fie decorelate:
→ semnalul decorelat ~ matricea de covariaţie diagonală!
→ decorelare ~ elementele de pe diagonalele secundare <<.

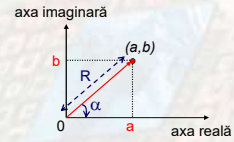
d. entropia unui vector cu componente aleatoare se conservă.



# 8.3. Transformata Fourier, Cosinus şi Sinus



## Numere complexe (review)




- reprezentarea numerelor complexe:

$$(a,b) \leftrightarrow a + j\cdot b$$

$$(a,b) \leftrightarrow R\cdot\cos\alpha + j\cdot R\cdot\sin\alpha$$

- amplitudine şi fază:

$$a + j\cdot b = R\cdot e^{j\cdot\alpha} \begin{cases} R = \sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha = \operatorname{atan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{cases}$$

- notaţii:

$$e^{j\cdot\alpha} = \cos(\alpha) + j\cdot\sin(\alpha), \quad e^{-j\cdot\alpha} = \cos(\alpha) - j\cdot\sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{j\cdot\alpha} + e^{-j\cdot\alpha}\right), \quad \sin(\alpha) = \frac{1}{2\cdot j}\cdot\left(e^{j\cdot\alpha} - e^{-j\cdot\alpha}\right)$$



## Transformata Fourier 1D continuă (review)

- descompunerea unui semnal periodic *f(x)* (dacă ne-periodic, considerăm T→∞) în armonice se realiza pe baza transformatei Fourier astfel:

$$\Im[f(x)] = F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{-2\pi j\nu x}dx$$

unde $\nu$ este frecvenţa reală.

- şi transformata inversă:

$$\Im^{-1}[F(\nu)] = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\cdot e^{2\pi j x\nu}d\nu$$

unde *x* reprezintă coordonatele spaţiale.

- sau altfel scris:

$$F(\nu) = |F(\nu)|\cdot e^{j\phi(\nu)} \begin{cases} |F(\nu)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\nu) + \mathrm{Im}^2(\nu)} \\ \phi(\nu) = \operatorname{atan}\left(\dfrac{\mathrm{Im}(\nu)}{\mathrm{Re}(\nu)}\right) \end{cases}$$

unde *Re* şi *Im* sunt părţile reale şi imaginare ale lui *F*.



## Transformata Fourier 1D continuă (review)

- câteva proprietăţi de bază, notăm: $\mathrm{f(x)} \overset{\Im}{\leftrightarrow} F(\nu)$, $\mathrm{g(x)} \overset{\Im}{\leftrightarrow} G(\nu)$

$$\Im[\lambda\cdot\mathrm{f(x)} + \mu\cdot\mathrm{g(x)}] = \lambda\cdot\mathrm{F}(\nu) + \mu\cdot\mathrm{G}(\nu)$$

$$\Im[\mathrm{f(a\cdot x)}] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

$$\Im[\mathrm{f(x-x_0)}] = e^{-2\pi j\nu x_0}F(\nu), \quad \Im^{-1}[F(\nu-\nu_0)] = e^{2\pi j\nu_0 x}f(x)$$

$$\Im[\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{dx}^n}] = (2\pi j\nu)^n\cdot F(\nu)$$

$$1 \overset{\Im}{\rightarrow} \delta(\nu), \quad \delta(x) \overset{\Im}{\rightarrow} 1$$

$$u(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 0.5 \\ 0 & rest \end{cases} \overset{\Im}{\rightarrow} \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} = \sin c(\nu) \quad \ldots$$

## Transformata Fourier 1D discretă (review)

- pornind de la semnalul continuu *f(x)*, semnalul discret se obţine prin eşantionare astfel:

$$u(m) = f(x_0 + m \cdot \Delta x)$$

unde $x_0$ reprezintă coordonata de la care începe eşantionarea (uzual $x_0$=0), $\Delta x$ este pasul de eşantionare iar *m=0,...,N-1* reprezintă coordonata discretă.

- transformata Fourier discretă, *v(k)*, devine:

$$v(k) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} u(m) \cdot e^{-\frac{2\pi jmk}{N}}$$

unde *k=0,...,N-1* reprezintă frecvenţa discretă.

- şi transformata inversă:

$$u(m) = \sum_{k=0}^{N-1} v(k) \cdot e^{\frac{2\pi jmk}{N}}$$

unde *m=0,...,N-1* reprezintă coordonata discretă.



## Transformata Fourier 1D discretă unitară

- dacă facem legătura cu transformările integrale, transformata Fourier discretă unitară se poate scrie astfel:

$$\left.\begin{aligned} v(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{N-1} u(m) \cdot W_N^{km} \\ u(m) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} v(k) \cdot W_N^{-km} \end{aligned}\right\} \text{ unde } W_N = e^{-\frac{2\pi j}{N}}$$

- unde matricea transformării este dată de funcţiile discrete:

$$M_{\Im} = \left\{\frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{km}\right\}, 0 \le k, m \le N-1$$

- iar transformarea se scrie matriceal astfel:

$$v = M_{\Im} \cdot u$$



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

- extinzând la funcţii discrete de două variabile putem scrie:

$$v(k,l) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} u(m,n) \cdot W_N^{km} \cdot W_N^{\ln}$$

unde *u(m,n)*, cu *m,n=0,...,N-1* reprezintă imaginea iar *v(k,l)*, *k,l=0,...,N-1* reprezintă coeficienţii descompunerii (transformata Fourier).

$$u(m,n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} v(k,l) \cdot W_N^{-km} \cdot W_N^{-\ln}$$

- se poate observa că transformata Fourier 2D este separabilă !

- matriceal aceasta devine:

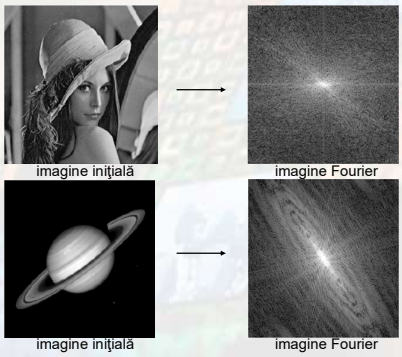
$V = M_{\Im} \cdot U \cdot M_{\Im}$ unde $M_{\Im}$ este matricea transformării definită anterior.

$$U = M_{\Im}^* \cdot V \cdot M_{\Im}^*$$



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

- exemple:






## Transformata Fourier 2D discretă unitară

[A.K. Jain]

simetrică şi unitară

- dacă imaginea *U* (*NxN*) şi imaginea transformată *V (NxN)* sunt convertite în vectorii *u* şi respectiv *v* (parcurgere linie cu linie) atunci:

$v = \Im \cdot u$ şi $u = \Im^* \cdot v$ unde $\Im = M_{\Im} \otimes M_{\Im}$ (produs Kronecker) reprezintă matricea transformatei Fourier 2D.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{0,0} \cdot B & \dots & a_{0,N-1} \cdot B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{N-1,0} \cdot B & \dots & a_{N-1,N-1} \cdot B \end{bmatrix}$$

în acest caz *A* şi *B* sunt matrice *NxN*.

- $\Im$ este de dimensiune $N^2xN^2$ ($M_{\Im}$ este *NxN*) şi este o matrice simetrică unitară:

$$\Im = \Im^T \text{ şi } \Im^* = \Im^{-1}$$



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

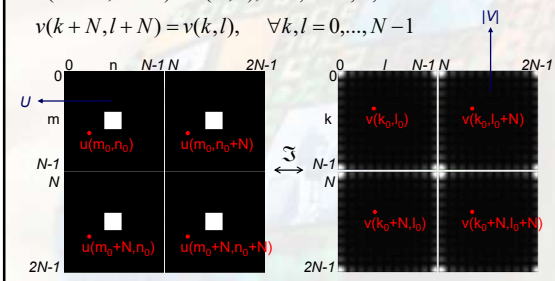
[M. Mignotte]

extensia periodică

- extensia spectrului DFT în afara domeniului iniţial se face prin perioditizare:

$$u(m+N, n+N) = u(m,n), \ \forall m,n = 0,...,N-1$$

$$v(k+N, l+N) = v(k,l), \quad \forall k,l = 0,...,N-1$$



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

[A.K. Jain]

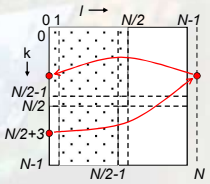
simetrie conjugată

- dacă matricea *U* (*NxN*) are valori reale (ex. imagine) atunci V (transformata Fourier) este complex conjugată faţă de mijloc:

$$v\left(\frac{N}{2}\pm k,\frac{N}{2}\pm l\right)=v^*\left(\frac{N}{2}\mu k,\frac{N}{2}\mu l\right),\quad 0\le k,l\le\frac{N}{2}-1$$

- cu alte cuvinte există o serie de coeficienţi *v(k,l)* ce determină pe toţi ceilalţi prin complex conjugare (vezi zonă haşurată) →

$$v\left(\frac{N}{2}+3,0\right)=v^*\left(\frac{N}{2}-3,\frac{N}{2}+\frac{N}{2}\right)$$






## Transformata Fourier 2D discretă unitară

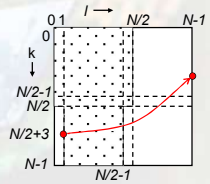
simetrie conjugată (continuare)

- dacă matricea *U* (*NxN*) are valori reale (ex. imagine) atunci V (transformata Fourier) este complex conjugată faţă de mijloc:

$$v\left(\frac{N}{2}\pm k,\frac{N}{2}\pm l\right)=v^*\left(\frac{N}{2}\mu k,\frac{N}{2}\mu l\right),\quad 0\le k,l\le\frac{N}{2}-1$$

- alt exemplu:

$$v\left(\frac{N}{2}+3,1\right)=v^*\left(\frac{N}{2}-3,\frac{N}{2}+\frac{N}{2}-1\right)$$



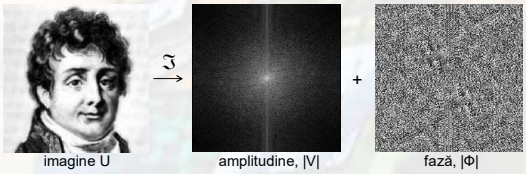



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

vizualizare spectru Fourier

- matricea *V* a coeficienţilor Fourier este de regulă o matrice complexă, astfel:

$$v(k,l)=|v(k,l)|\cdot e^{j\phi(k,l)}$$

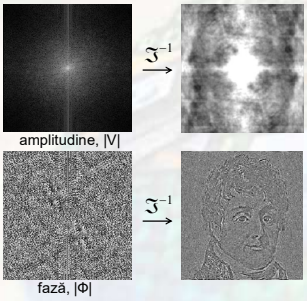



- în practică se foloseşte doar imaginea de amplitudine, din acest motiv în toate imaginile anterioare am ilustrat doar |*V*|.



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

vizualizare spectru Fourier (continuare)




→ coeficientul de amplitudine indică "cât de mult" dintr-o componentă de o anumită frecvenţă este prezent în imagine,

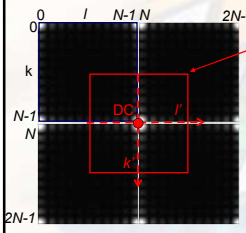
→ coeficientul de fază indică "unde" se află acea componentă în imagine.



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

vizualizare spectru Fourier (continuare)

- pentru a păstra convenţia generală de reprezentare a spectrelor de frecvenţă, componenta continuă DC (*v(0,0)*) se reprezintă în mijlocul imaginii → oglindire spectru faţă de centru:




$$v\left(k-\frac{N}{2},l-\frac{N}{2}\right)\xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}}u(m,n)\cdot e^{\frac{2\pi j\left(\frac{N}{2}m+\frac{N}{2}n\right)}{N}}$$

$$u(m,n)\cdot e^{\frac{2\pi j\left(\frac{N}{2}m+\frac{N}{2}n\right)}{N}}=u(m,n)\cdot(-1)^{(m+n)}$$

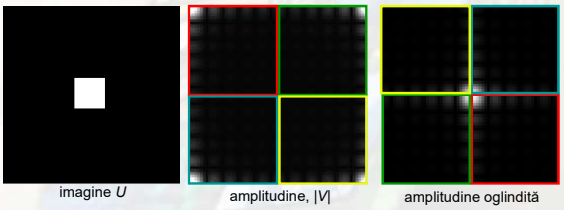
→ oglindirea faţă de centru ~ alternarea valorilor imaginii cu + şi respectiv -.



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

vizualizare spectru Fourier (continuare)

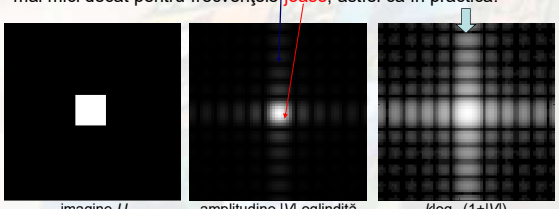
- componenta continuă DC (*v(0,0)*) în centru:



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

vizualizare spectru Fourier (continuare)

- de regulă pentru frecvenţele înalte coeficienţii Fourier sunt mult mai mici decât pentru frecvenţele joase, astfel că în practică:



imagine $U$ — amplitudine $|V|$ oglindită — $k\log_{10}(1+|V|)$

constantă de normalizare [0;255]



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

baza de imagini a transformatei

- din alt punct de vedere, transformarea imaginii înseamnă proiecţia acesteia pe o bază de imagini (ce definesc transformarea, vezi începutul cursului)

$$V = M_{\Im} \cdot U \cdot M_{\Im}$$

$$M_{\Im} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{km} \right\}, 0 \le k, m \le N-1$$

$$W_N = e^{-\frac{2\pi j}{N}}$$

$$U = M_{\Im}^* \cdot V \cdot M_{\Im}^*$$

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{k,l}^* \cdot V(k,l)$$

$$A_{k,l}^* = \phi_k^* \cdot \phi_l^{*T}$$

unde $\phi_k^*$ reprezintă coloana $k$ a matricei $M_{\Im}^{*T}$.

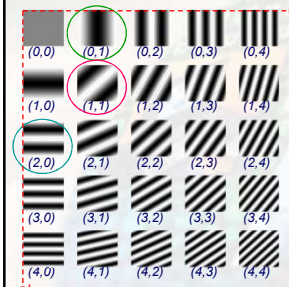
$$\Rightarrow A_{k,l}^* = \frac{1}{N} \left\{ W_N^{-(k \cdot m + l \cdot n)} \right\}$$

unde $m,n=0,...,N-1$.



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

baza de imagini a transformatei (continuare) $A_{k,l}^*$




componenta reală (cos, $N$=64)

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{k,l}^* \cdot V(k,l)$$

$$\Rightarrow A_{k,l}^* = \frac{1}{N} \left\{ e^{\frac{2\pi j}{N}(k \cdot m + l \cdot n)} \right\}$$

- imaginea se poate scrie ca o sumă de proiecţii pe aceste imagini =frecvenţe 2D

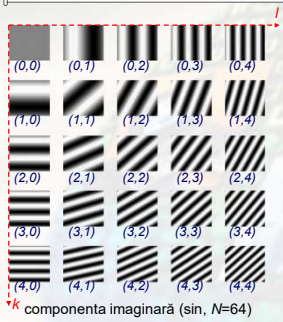
- frecvenţă orizontală 1/N
- frecvenţă orizontală şi verticală 1/N
- frecvenţă verticală 2/N

* sunt frecvenţe reduse.



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

baza de imagini a transformatei (continuare) $A_{k,l}^*$




componenta imaginară (sin, $N$=64)

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{k,l}^* \cdot V(k,l)$$

$$\Rightarrow A_{k,l}^* = \frac{1}{N} \left\{ e^{\frac{2\pi j}{N}(k \cdot m + l \cdot n)} \right\}$$

- imaginea se poate scrie ca o sumă de proiecţii pe aceste imagini = frecvenţe 2D



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

teorema convoluţiei

- filtrarea liniară a imaginilor se bazează pe convoluţia dintre imaginea de prelucrat şi nucleul de filtrare (vezi Cursul 5),
- *teorema convoluţiei* spune că această operaţie este echivalentă cu un produs între spectrul Fourier al imaginii şi spectrul Fourier al nucleului de filtrare:

$$u_2(m,n) = \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{M-1} w(m',n') \cdot u_1(m-m', n-n')$$

unde $U_1$ reprezintă imaginea iniţială ($NxN$), $U_2$ este imaginea filtrată, $m,n=0,...,N-1$ iar $w()$ reprezintă nucleul de filtrare de dimensiune $MxM$ ($M<N$).

$$\Rightarrow v_2(k,l) = w_{\Im}(k,l) \cdot v_1(k,l)$$

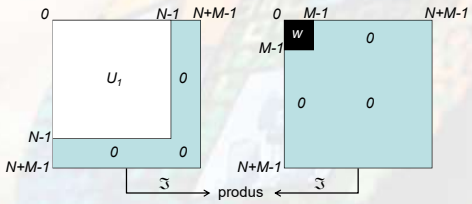
unde $V_2$ reprezintă transformata Fourier a lui $U_2$ ($NxN$), $V_1$ este transformata Fourier a lui $U_1$ iar $w_{\Im}()$ reprezintă transformata Fourier a nucleului de filtrare.



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

teorema convoluţiei (continuare)

- câteva aspecte practice: pentru ca teorema să fie adevărată imaginea şi nucleul de filtrare trebuie să fie bordate cu 0 până la o dimensiune cel puţin egală cu suma dimensiunilor lor:

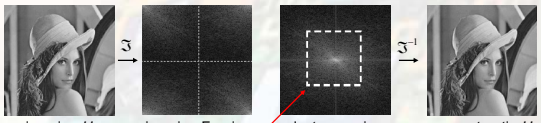



operaţiile de filtrare liniară pot fi acum implementate frecvenţial !

## Transformata Fourier 2D discretă unitară

compactarea energiei

- fiind vorba de o transformare unitară aceasta are proprietatea de compactare a energiei în cât mai puţini coeficienţi ai transformării (vezi pagina 17),




imagine *U* (256x256) | imagine Fourier |*V*| (256x256) | selectare regiune 128x128 din *V* (spectru oglindit) | reconstrucţie *U* (256x256)

- zona selectată din spectru contribuie la doar 68.7% din energia totală a imaginii → *compactare redusă* !

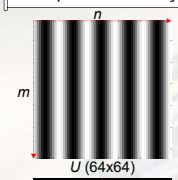


## Transformata Fourier 2D discretă unitară

$$\cos(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{j\cdot\alpha}+e^{-j\cdot\alpha}\right)$$

$$e^{2\pi j\cdot v_0 x}\cdot f(x)\xrightarrow{\Im}F(v-v_0)$$

exemple: orientare şi frecvenţă

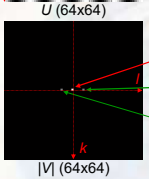



*U* (64x64)

$$u(m,n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{64}\cdot 5\cdot n\right)\in[0;1]$$

$$u(m,n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\left(e^{\frac{2\pi j}{64}\cdot 5\cdot n}+e^{\frac{-2\pi j}{64}\cdot 5\cdot n}\right)$$

DC (comp.continuă)




|*V*| (64x64)

$$v(k,l)=\frac{1}{2}\cdot\delta(k,l)+$$

$$\frac{1}{4}\cdot\delta(k,l-5)+$$

$$\frac{1}{4}\cdot\delta(k,l+5)$$

câte un coeficient pe frecvenţa discretă din imagine (*l*=+/-5)
*Atenţie*: unitar ~ /64

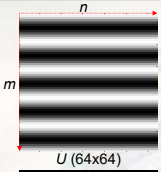


## Transformata Fourier 2D discretă unitară

$$\cos(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{j\cdot\alpha}+e^{-j\cdot\alpha}\right)$$

$$e^{2\pi j\cdot v_0 x}\cdot f(x)\xrightarrow{\Im}F(v-v_0)$$

exemple: orientare şi frecvenţă (continuare)

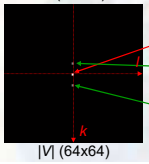



*U* (64x64)

$$u(m,n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{64}\cdot 5\cdot m\right)\in[0;1]$$

$$u(m,n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\left(e^{\frac{2\pi j}{64}\cdot 5\cdot m}+e^{\frac{-2\pi j}{64}\cdot 5\cdot m}\right)$$

DC (comp.continuă)




|*V*| (64x64)

$$v(k,l)=\frac{1}{2}\cdot\delta(k,l)+$$

$$\frac{1}{4}\cdot\delta(k-5,l)+$$

$$\frac{1}{4}\cdot\delta(k+5,l)$$

câte un coeficient pe frecvenţa discretă din imagine (*k*=+/-5)
*Atenţie*: unitar ~ /64

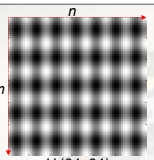


## Transformata Fourier 2D discretă unitară

$$\cos(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{j\cdot\alpha}+e^{-j\cdot\alpha}\right)$$

$$e^{2\pi j\cdot v_0 x}\cdot f(x)\xrightarrow{\Im}F(v-v_0)$$

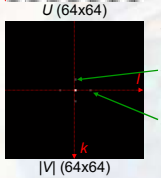
exemple: orientare şi frecvenţă (continuare)




*U* (64x64)

$$u(m,n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{64}\cdot 7\cdot n\right)\in[0;1]$$

DC (comp.continuă)




|*V*| (64x64)

$$v(k,l)=\frac{1}{2}\cdot\delta(k,l)+$$

$$\frac{1}{8}\cdot\delta(k-5,l)+\frac{1}{8}\cdot\delta(k+5,l)+$$

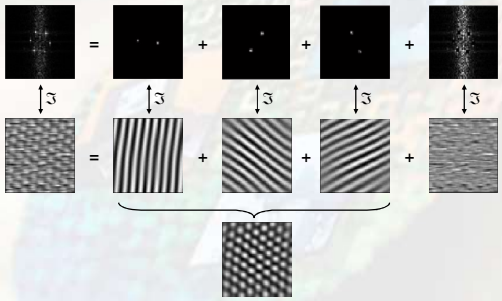
$$\frac{1}{8}\cdot\delta(k,l-7)+\frac{1}{8}\cdot\delta(k,l+7)$$

*2 coeficienţi pe frecvenţele discrete din imagine (k=+/- 5, l=+/-7)*
*Atenţie*: unitar ~ /64



## Transformata Fourier 2D discretă unitară

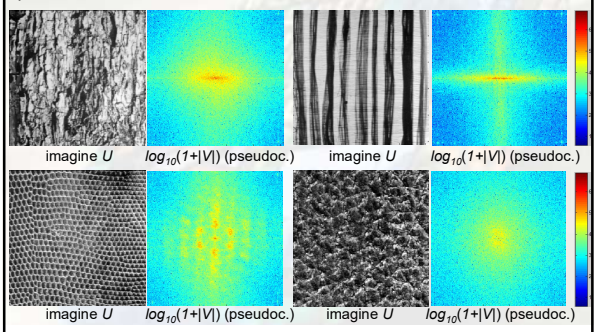
exemple: superpoziţie






## Transformata Fourier 2D discretă unitară

exemple: texturi naturale

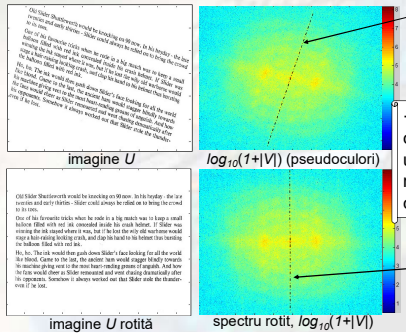


imagine *U* | $log_{10}(1+|V|)$ (pseudoc.) | imagine *U* | $log_{10}(1+|V|)$ (pseudoc.)

imagine *U* | $log_{10}(1+|V|)$ (pseudoc.) | imagine *U* | $log_{10}(1+|V|)$ (pseudoc.)

## Transformata Fourier 2D discretă unitară

exemple: rotirea spectrului

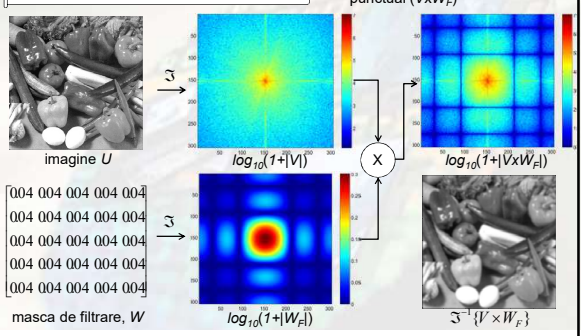





## Transformata Fourier 2D discretă unitară

exemple: filtrare liniară frecvenţială

Obs.:se înmulţesc transformatele punctual ($VxW_F$)

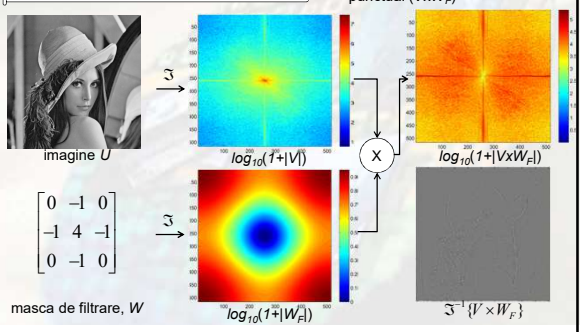





## Transformata Fourier 2D discretă unitară

exemple: filtrare liniară frecvenţială

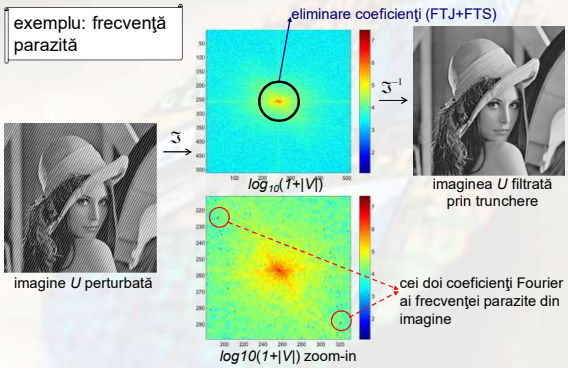
Obs.:se înmulţesc transformatele punctual ($VxW_F$)






## Transformata Fourier 2D discretă unitară

exemplu: frecvenţă parazită






## Transformata Sinus 2D discretă unitară

[A.K. Jain]

- transformata sinus discretă unitară permite descompunerea unui semnal pe o bază de sinusoide, astfel (1D):

$$v(k)=\sqrt{\frac{2}{N+1}}\sum_{m=0}^{N-1}u(m)\cdot\sin\frac{\pi\cdot(k+1)\cdot(m+1)}{N+1}$$

unde *u(m)* este semnalul de intrare iar *v(k)* este semnalul transformat, *k,m=0,...,N-1.*

- şi transformata inversă:

$$u(m)=\sqrt{\frac{2}{N+1}}\sum_{k=0}^{N-1}v(k)\cdot\sin\frac{\pi\cdot(k+1)\cdot(m+1)}{N+1}$$

- matricea transformării este:

$$\Psi=\{\psi(k,m)\}=\left\{\sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin\frac{\pi\cdot(k+1)\cdot(m+1)}{N+1}\right\}$$ cu *k,m=0,...,N-1.*



## Transformata Sinus 2D discretă unitară

[A.K. Jain]

- astfel, transformata sinus discretă unitară 2D a unei imagini *U* (*NxN*) se poate scrie pe baza transformatei unidimensionale ca produs matriceal:

$$V=A\cdot U\cdot A^T \quad\rightarrow V=\Psi\cdot U\cdot\Psi^T$$

$$U=A^{*T}\cdot V\cdot A^* \quad\rightarrow U=\Psi^{*T}\cdot V\cdot\Psi^*$$

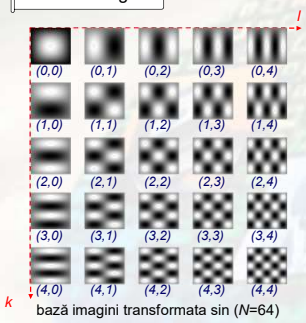
reală, simetrică şi ortogonală

$$\Psi^*=\Psi=\Psi^T=\Psi^{-1} \qquad \begin{cases} V=\Psi\cdot U\cdot\Psi \\ U=\Psi\cdot V\cdot\Psi \end{cases}$$

nu reprezintă partea imaginară a transformatei Fourier !

## Transformata Sinus 2D discretă unitară

baza de imagini




bază imagini transformata sin (*N*=64)

$$U = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} A^*_{k,l} \cdot V(k,l)$$

$$A^*_{k,l} = \psi^*_k \cdot \psi^{*T}_l$$

unde $\psi^*_k$ reprezintă coloana *k* a matricei $\Psi^{*T}$.

$$\Psi^* = \Psi = \Psi^T = \Psi^{-1}$$

$$\Rightarrow A^*_{k,l} = \psi_k \cdot \psi^T_l$$

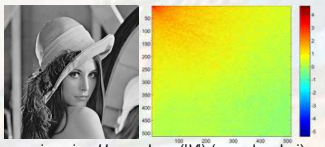
unde $\psi_k$ reprezintă coloana *k* a matricei $\Psi$ .



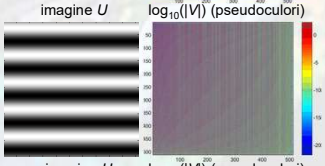
## Transformata Sinus 2D discretă unitară

propune o compactare foarte bună până la excelentă a energiei.

- exemple:



imagine *U* $\log_{10}(|V|)$ (pseudoculori)



imagine *U* $\log_{10}(|V|)$ (pseudoculori)



## Transformata Cosinus 2D discretă unitară

[A.K. Jain]

- transformata cosinus discretă unitară permite descompunerea unui semnal pe o bază de cosinusuri, astfel (1D):

$$v(k) = \alpha(k)\sum_{m=0}^{N-1} u(m)\cdot\cos\frac{\pi\cdot(2\cdot m+1)\cdot k}{2\cdot N}$$

unde *u(m)* este semnalul de intrare, *v(k)* este semnalul transformat, *k,m=0,...,N-1* iar α(k) este dat de:

$$\alpha(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & k=0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & altfel \end{cases}$$

- şi transformata inversă:

$$u(m) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k)\cdot v(k)\cdot\cos\frac{\pi\cdot(2\cdot m+1)\cdot k}{2\cdot N}$$



## Transformata Cosinus 2D discretă unitară

[A.K. Jain]

- matricea transformării este:

$$C = \{c(k,m)\} = \left\{\alpha(k)\cos\frac{\pi\cdot(2\cdot m+1)\cdot k}{2\cdot N}\right\}$$

- astfel, transformata cosinus discretă unitară 2D a unei imagini *U* (*NxN*) se poate scrie pe baza transformatei unidimensionale ca produs matriceal:

$$V = A\cdot U\cdot A^T \quad \rightarrow V = C\cdot U\cdot C^T$$

$$U = A^{*T}\cdot V\cdot A^* \quad \rightarrow U = C^{*T}\cdot V\cdot C^*$$

reală şi ortogonală

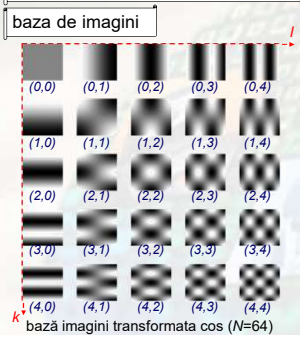
$$C = C^*, C^{-1} = C^T \quad \begin{cases} V = C\cdot U\cdot C^T \\ U = C^T\cdot V\cdot C \end{cases}$$



## Transformata Cosinus 2D discretă unitară

nu reprezintă partea reală a transformatei Fourier !

baza de imagini




bază imagini transformata cos (*N*=64)

$$U = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} A^*_{k,l} \cdot V(k,l)$$

$$A^*_{k,l} = c^*_k \cdot c^{*T}_l$$

unde $c^*_k$ reprezintă coloana *k* a matricei $C^{*T}$.

$$C = C^*, C^{-1} = C^T$$

$$\Rightarrow A^*_{k,l} = c_k \cdot c^T_l$$

unde $c_k$ reprezintă coloana *k* a matricei $C^T$ .

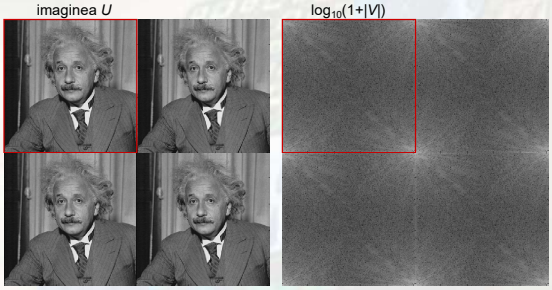


## Transformata Cosinus 2D discretă unitară

extensia periodică

- (review) la transformata Fourier extensia se realizează prin perioditizare:

imaginea *U* $\log_{10}(1+|V|)$

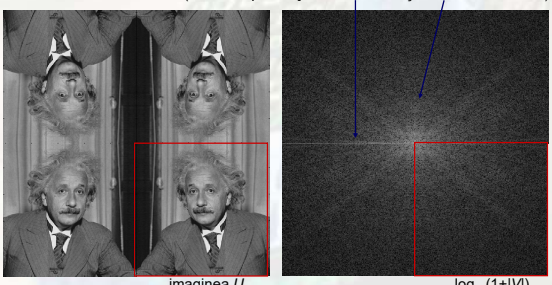


[D.J. Fleet, A.D. Jepson]

## Transformata Cosinus 2D discretă unitară

extensia periodică (continuare)

- extensia spectrului transformatei cosinus discrete se face de această dată prin oglindire (reducere prezenţă linii orizontale şi verticale = bordură)



imaginea *U* — $\log_{10}(1+|V|)$

[D.J. Fleet, A.D. Jepson]



## Valori şi vectori proprii (review)

[E. Garcia]

- fie *A* o matrice pătratică (*NxN*) şi *c* un scalar, transformarea matricei *A* într-o matrice singulară poartă numele de problema valorilor proprii:

$$\det(A - c \cdot I) = 0$$

unde *I* este matricea unitate iar soluţiile ecuaţiei, notate $c_i$, poartă numele de valori proprii.

- exemplu *N=2*:

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ c \cdot I_2 = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A - c \cdot I_2 = \begin{bmatrix} 13-c & 5 \\ 2 & 4-c \end{bmatrix}$$

$$\det(A - c \cdot I_2) = 0 \Rightarrow (13-c)\cdot(4-c) - 10 = 0 \text{ (ecuaţie caracteristică)}$$

$$\Rightarrow c^2 - 17 \cdot c + 42 = 0$$

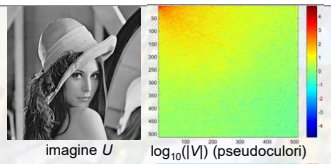
soluţiile sunt: $c_1 = 3, c_2 = 14$



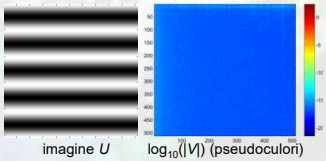
## Transformata Cosinus 2D discretă unitară

propune o compactare excelentă a energiei pentru semnale cu corelaţie ridicată.

- exemple:



imagine *U* — $\log_{10}(|V|)$ (pseudoculori)



imagine *U* — $\log_{10}(|V|)$ (pseudoculori)



## Valori şi vectori proprii (review)

[E. Garcia]

- exemplu (continuare): $A = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, c \cdot I_2 = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, c_1 = 3, c_2 = 14$

$$Tr(A) = 13 + 4 = 17$$

$$Tr(A) = c_1 + c_2$$

- raportându-ne la *Tr(A)* putem spune că:

$$\left.\begin{aligned} c_1 / Tr(A) &= 17.6\% \\ c_2 / Tr(A) &= 82.4\% \end{aligned}\right\}$$ valoarea proprie cea mai mare corespunde a 82.4% din *Tr(A)* (valoare proprie principală)

- având valorile proprii $c_i$ (*i=0,...,N-1*) putem scrie:

$$(A - c_i \cdot I) \cdot X_i = 0$$

unde $X_i$ sunt nişte vectori coloană de dimensiune *N* ce corespund fiecărei valori proprii $c_i$ → vectori proprii.

- aceştia au proprietatea de a fi liniar independenţi → bază pentru o transformare ?



# 8.4. Transformări bazate pe vectori proprii



## Transformata Karhunen-Loeve 1D

[A.K. Jain]

- pentru un vector real aleator *u* (dimensiune *N*) vectorii de bază ai transformatei K-L, $\Phi_k$, sunt daţi de relaţia:

$$R_u \cdot \phi_k = \lambda_k \cdot \phi_k$$

unde $R_u$ reprezintă matricea de covariaţie a lui *u*, $\lambda_k$ şi $\Phi_k$ reprezintă valorile şi respectiv vectorii proprii ai lui $R_u$ iar *k=0,...,N-1*.

→ se poate demonstra că $\Phi_k$ sunt ortonormaţi ($R_u$ este simetrică).

- transformarea se scrie matriceal:

$$v = \Phi^T \cdot u$$

unde *v* reprezintă vectorul transformat iar $\Phi$ este matricea transformării ce are drept coloane vectorii $\Phi_k$ (vectorii proprii).

$$\Phi^T \cdot \Phi = I, \Phi^{-1} = \Phi^T$$

- şi transformarea inversă:

$$u = \Phi \cdot v$$

## Transformata Karhunen-Loeve 1D

- relaţia iniţială se poate rescrie matriceal:

$$R_u \cdot \phi_k = \lambda_k \cdot \phi_k$$

$$\Rightarrow R_u \cdot \Phi = \Phi \cdot \Lambda = \Phi \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T \cdot R_u \cdot \Phi = \Phi^T \cdot \Phi \cdot \Lambda = \Lambda = R_v$$

→ matricea de covariaţie devine diagonală !

$$R_u = \overline{(u-\mu_u)\cdot(u-\mu_u)^{*T}} = \begin{bmatrix} \overline{(u_0-\mu_u)^2} & \dots & \cancel{\overline{(u_0-\mu_u)\cdot(u_{N-1}-\mu_u)}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \cancel{\overline{(u_{N-1}-\mu_u)\cdot(u_0-\mu_u)}} & \dots & \overline{(u_{N-1}-\mu_u)^2} \end{bmatrix}$$

- în urma transformării K-L semnalul este complet decorelat!



## 8.5. Transformata Wavelet



## Transformata Karhunen-Loeve 2D

- pentru un vector real aleator *u* (dimensiune *N*) vectorii de bază ai transformatei K-L, $\Phi_k$, sunt daţi de relaţia:



## 8.6. Transformata Hough



## Transformata Karhunen-Loeve 2D

[A.K. Jain]

- grafic



## Sfârşit Curs